中国科学技术大学

2020 ～ 2021 学年第一学期期末考试试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称	复变函数 B	课程编号	001548
考试时间	2020 年 12 月 13 日 8:30-10:30	考试形式	闭卷
姓　　名		学　　号	

总　分		阅 卷 人	

1. (10 分) 将 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}+e^{-z}$ 在 $z=0$ 处展开为幂级数, 并指出其收敛半径.

解.

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}+e^{-z}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^n+\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{z^m}{m!}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(-2^{-n-1}+\frac{(-1)^n}{n!}\Big)z^n,$$

收敛半径为 2.

2. (10 分) 将 $f(z)=\dfrac{1}{z^3+2z^2}$ 在 $1<|z+1|<+\infty$ 展开为洛朗级数.

解. 设 $w=1/(z+1)$, 则 $0<|w|<1$,

$$\frac{1}{z^3+2z^2}=\frac{w^3}{(1-w)^2(1+w)}=\frac{w^3}{2}\Big(\frac{1}{1-w^2}+\frac{1}{(1-w)^2}\Big)$$

$$=\frac{w^3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1+(-1)^n}{2}+n+1\Big)w^n=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-3-(-1)^n}{4}(z+1)^{-n}.$$

3. (5 分) 计算 $(2020+i)(2-i)$.

解. $(2020+i)(2-i)=4040+1+2i-2020i=4041-2018i$.

4. (5 分) 计算 $\operatorname{Arc}\cos 2$.

解. 设 $\cos z=2$, 则 $\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2$,

$$e^{2iz}-4e^{iz}+1=0.$$

于是 $e^{iz}=2\pm\sqrt{3}$, $iz=\ln(2\pm\sqrt{3})+2n\pi i$, 即 $z=2n\pi\pm\ln(2+\sqrt{3})i, n\in\mathbb{Z}$.

5. (10 分) 求 α 使得 $v(x,y)=\alpha x^2y-y^3+x+y$ 是调和函数, 并求虚部为 $v(x,y)$ 且满足 $f(0)=1$ 的解析函数 $f(z)$.

解. 由 $v_{xx}+v_{yy}=0$ 可知 $2\alpha y-6y=0$, 因此 $\alpha=3$. (3 分) 设 $f=u+iv$, 则由柯西-黎曼方程,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2+1,$$

因此 $u(x,y)=x^3-3xy^2+x+g(y)$. (3 分) 由于

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

即 $-6xy+g'(y)=-(6xy+1),\quad g(y)=-y+c$, 从而

$$u(x,y)=x^3-3xy^2+x-y+c,$$

$$f(z)=x^3-3xy^2+x-y+c+i(3x^2y-y^3+x+y)=z^3+(1+i)z+c$$

(3 分). 由于 $f(0)=1$, 因此 $c=1, f(z)=z^3+(1+i)z+1$. (1 分)

6. (30 分) 求积分 (所有路径均为逆时针)

(1) $\displaystyle\int_C(e^z+3z^2+1)\mathrm{d}z$, $C:|z|=2,\mathrm{Re}\,z>0$.

(2) $\displaystyle\int_C\frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2(z-5)}$, $C:|z|=3$.

(3) $\displaystyle\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(\sin z)(z+6)(z-5)}$, $C:|z|=4$.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$.

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+2\sin^2\theta)^2}$.

解. (1) 由于该函数解析, 因此

$$\int_C(e^z+3z^2+1)\mathrm{d}z=(e^z+z^3+z)\big|_{-2i}^{2i}=e^{2i}-e^{-2i}-12i=(2\sin 2-12)i.$$

(2) 该函数 f 在 $|z|<3$ 中有 1 阶极点 0 和 2 阶极点 1, 且

$$\mathrm{Res}[f,0]=-\frac{1}{5},\quad \mathrm{Res}[f,1]=\Big(\frac{1}{z(z-5)}\Big)'\Big|_{z=1}=\frac{5-2z}{z^2(z-5)^2}\Big|_{z=1}=\frac{3}{16},$$

因此该积分为

$$2\pi i(-\frac{1}{5}+\frac{3}{16})=-\frac{\pi i}{40}.$$

(3) 该函数 f 在 $|z|<4$ 中有 1 阶极点 $0,\pi,-\pi$ 且

$$\mathrm{Res}[f,0]=-\frac{1}{30},\quad \mathrm{Res}[f,\pi]=\frac{1}{(\pi+6)(5-\pi)},\quad \mathrm{Res}[f,\pi]=-\frac{1}{(\pi-6)(\pi+5)},$$

因此该积分为

$$2\pi i\Big(-\frac{1}{30}+\frac{1}{(\pi+6)(5-\pi)}-\frac{1}{(\pi-6)(\pi+5)}\Big)=-2\pi i\Big(\frac{1}{30}+\frac{2(\pi^2-30)}{(\pi^2-36)(\pi^2-25)}\Big).$$

(4) 函数 $R(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+3}$ 在上半平面有 1 阶极点 $-1+2i$, 因此

$$\operatorname{Res}[R(z)e^{iz},-1+2i]=\frac{e^{-2-i}}{4i}=\frac{-\sin 1-i\cos 1}{4e^2},$$

原积分等于

$$\operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x\right]=\operatorname{Re}\left[2\pi i\frac{-\sin 1-i\cos 1}{4e^2}\right]=\frac{\pi\cos 1}{2e^2}.$$

(5)

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+2\sin^2\theta)^2}=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(2-\cos 2\theta)^2}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2(2-\cos\theta)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{4(2-\cos\theta)^2}.$$

令 $z=e^{i\theta}$, 则原积分等于

$$\int_{|z|=1}\frac{z\mathrm{d}z}{i(z^2-4z+1)^2}.$$

设被积函数为 $f(z)$, 则 f 在 $|z|<1$ 上有 2 阶极点 $2-\sqrt{3}$, 且

$$\operatorname{Res}[f,2-\sqrt{3}]=\left[\frac{1}{i(z-2-\sqrt{3})^2}-\frac{2z}{i(z-2-\sqrt{3})^3}\right]\Big|_{z=2-\sqrt{3}}=\frac{1}{6\sqrt{3}i}.$$

从而原积分等于

$$2\pi i\cdot\frac{1}{6\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

7. (10 分) 求方程 $z^8+e^z+6z+1=0$ 在 $1<|z|<2$ 中根的个数, 并说明理由.
解. 由于在 $|z|=1$ 上

$$|z^8+e^z+1|\le 1+e+1<6=|6z|,$$

由罗歇定理, 该方程在 $|z|<1$ 中有 1 个根. 由于在 $|z|=2$ 上

$$|6z+e^z+1|\le 12+e^2+1<2^8=|z^8|,$$

由罗歇定理, 该方程在 $|z|<2$ 中有 8 个根. 从而该方程在 $1<|z|<2$ 中有 7 个根.

8. (10 分) 利用拉氏变换解微分方程

$$\begin{cases} y''+2y'+y=te^t \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

解. 设 $Y = Ly$, 则

$$p^2Y + 2pY + Y = \frac{1}{(p-1)^2},$$

$$Y = \frac{1}{(1+p)^2(1-p)^2} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-1}\Big),$$

$$y = L^{-1}Y = \frac{1}{4}(te^t + te^{-t} + e^{-t} - e^t).$$

9. (10 分) 设 f 是域 $|z| > r > 0$ 上的解析函数. 证明: 如果对于 $|a| > R > r$, $\lim_{z\to\infty} f(z) = f(a)$, 则积分

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = 0.$$

证明. 设 $R' > |a|$, 则函数 $\dfrac{f(z)}{z-a}$ 在 $|z| > R'$ 上解析, 因此由多连通区域的柯西积分定理, 对任意 $R'' > R' + |a|$,

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z.$$

由长大不等式

$$\Big|\int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z - 2\pi i f(a)\Big| = \Big|\int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\mathrm{d}z\Big| \le 2\pi \max_{|z-a|=R''} |f(z) - f(a)|.$$

令 $R' \to +\infty$, 则

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = 2\pi i f(a).$$

设 D 为区域 $R < |z| < R'$, C 为其边界. 由多连通区域的柯西积分定理

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z - \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \int_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = 2\pi i f(a),$$

因此

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = 0.$$