

# 复变函数 B 随堂测验

时长: 4.5 小时, 满分 60 分.

## 练习 1. 计算题.

1. 化简  $(\sqrt{3} + i)^{114514}$ . (1 分)
2. 计算  $(-4 + 4i)^{1/5}$ . (1 分)

## 练习 2. 图像题.

1. 请问  $\arg(z + 1) = -\frac{\pi}{2}$  的图像是什么? (1 分)
2. 请问  $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{1919}$  的图像是什么? (1 分)
3. 请问  $\arg \frac{z-1}{z+1} = \frac{\pi}{3}$  的图像是什么? (1 分)
4. 将  $x^2 + 6x + y^2 - 18y = 810$  化为复数形式. (1 分)
5.  $x^2 - y^2 = 4$  在  $w = z^2$  下的像是什么? (1 分)

## 练习 3. 连续与解析.

1.  $\arg z$  是连续函数吗? (1 分)
2. 证明:  $f(z) = z\bar{z}^{-1} - \bar{z}z^{-1}$  在  $z \rightarrow 0$  时极限不存在. (1 分)
3. 验证  $e^x(x \cos y - y \sin y) + ie^x(y \cos y + x \sin y)$  在全平面解析, 并求出其导数. 它在无穷远解析吗? 为何? (3 分)
4. 求出  $\frac{1}{\sin z - 2}$  的解析区域. (1 分)
5. 证明: 若整函数 (在整个复平面解析)  $f$  将实轴和虚轴均映为实数, 则  $f'(0) = 0$ . (1 分)

## 练习 4. 证明: 如果 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ 且 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ , 则 $z_1, z_2, z_3$ 构成一个正三角形, 且单位圆 (圆心为 0, 半径为 1 的圆) 是它的外接圆. (2 分)

## 练习 5. 证明: 设 $|a| < 1$ . 证明 $|z| = 1$ 当且仅当 $|z - a| = |1 - \bar{a}z|$ . (2 分)

## 练习 6. 设 4 维实向量空间 $\mathbb{H} = \{z + wj \mid z, w \in \mathbb{C}\}$ 上的乘法运算为

$$(z_1 + w_1j)(z_2 + w_2j) = (z_1z_2 - w_1\bar{w}_2) + (z_1w_2 + w_1\bar{z}_2)j,$$

定义  $\tau(z + wj) = \bar{z} - wj$ . 证明

1. 对于任意  $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$ ,  $\tau(\alpha\beta) = \tau(\alpha)\tau(\beta)$ . (1 分)
2. 对于任意  $\alpha \in \mathbb{H}$ ,  $\tau(\tau(\alpha)) = \alpha$  且  $\alpha\tau(\alpha)$  是非负实数.  $\alpha\tau(\alpha) = 0$  当且仅当  $\alpha = 0$ . (1 分)
3. 对于任意非零  $\alpha \in \mathbb{H}$ , 存在  $\beta \in \mathbb{H}$  使得  $\alpha\beta = \beta\alpha = 1$ . (1 分)

练习 7. (4 分) 计算积分

$$\int_{\gamma} \frac{3z-2}{z} dz,$$

其中  $\gamma$  为圆周  $\{z: |z|=2\}$  的上半圆, 从  $-2$  到  $2$ .

练习 8. (4 分) 求  $\frac{1}{1-z-z^2}$  在  $z=0$  处的泰勒展开  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . 由此求得斐波那契数列

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

的通项公式.

练习 9. (4 分) 函数

$$\sin \frac{1}{1-z}$$

有哪些奇点 (包括  $\infty$ )? 并求其在  $1$  处的洛朗展开.

练习 10. (4 分) 计算

$$\frac{e^z}{z(z-1)}$$

在其所有奇点处的留数.

练习 11. (4 分) 证明如果  $f$  在复平面解析且有界, 则对任意  $a \in \mathbb{C}$ , 有

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz = 0,$$

其中  $R > |a|$ . 由此证明  $f$  是常数.

练习 12. (4 分) 计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^3(z-1)^3(z-3)^5}.$$

练习 13. (4 分) 求下列全纯函数在  $\{z: |z| < 1\}$  中的零点个数:

1.  $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$ ;

2.  $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8$ ;

3.  $e^z - 4z^n + 1$ .

练习 14. (4 分) 计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

练习 15. (4 分) 证明

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2} \pi.$$

练习 16. (4 分) 利用拉普拉斯变换解微分方程

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) = e^t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$