第一章　复数与复变函数

1.1　复数及其代数运算

作业 1. 判断题: z 是实数当且仅当 $z=\overline{z}$. (✓).

作业 2. 判断题: z 是纯虚数当且仅当 $z=-\overline{z}$. (×).

解析. $z=0$ 也满足 $z=-\overline{z}$ 但却不是纯虚数. ■

作业 3. 填空题: (2022 年 A 卷) 设 $z=-i$, 则 $1+z+z^2+z^3+z^4=$___1___.

解析.

$$1+z+z^2+z^3+z^4=\frac{z^5-1}{z-1}=\frac{-i-1}{-i-1}=1.$$ ■

作业 4. 填空题: (2021 年 A 卷) 化简 $\dfrac{(1+i)^{101}}{(1-i)^{99}}=$___2___.

解析.

$$\frac{(1+i)^{101}}{(1-i)^{99}}=(1+i)^2\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{99}=2i\cdot i^{99}=2i\cdot(-i)=2.$$ ■

作业 5. 填空题: 如果 x,y 是实数且 $\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$, 那么 $x+y=$___12___.

解析.

$$x+1+i(y-3)=(1+i)(5+3i)=2+8i,$$

因此 $x=1,y=11,x+y=12$. ■

作业 6. $z_1=-z,z_2=\overline{z},z_3=-\overline{z}$ 在复平面上对应的点分别与 z 在复平面上对应的点是什么关系?

解. z_1 是 z 关于原点中心对称的点, z_2 是 z 关于实轴轴对称的点, z_3 是 z 关于虚轴轴对称的点. ■

作业 7. 已知点 z_1,z_2,z_3 不共线. 点 $\dfrac{1}{2}(z_1+z_2)$ 和 $\dfrac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$ 表示什么点?

解. 点 $\frac{1}{2}(z_1+z_2)$ 表示 z_1,z_2 连线的中点, 点 $\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$ 表示 z_1,z_2,z_3 形成的三角形 (可能退化) 的重心. ■

1.2 复数的三角与指数形式

作业 8. 判断题: z 是实数当且仅当 $\arg z=0,\pi$. (×).

解析. $z=0$ 辐角无意义. ■

作业 9. 判断题: z 是纯虚数当且仅当 $\arg z=\pm\frac{\pi}{2}$. (✓).

解析. $z=0$ 辐角无意义, 所以此时不包含 $z=0$ 的情形. ■

作业 10. 求下列复数 z 的实部与虚部, 共轭复数, 模和主辐角:

(1) $\frac{1}{3+2i}$; (2) $\frac{3i}{1-i}-\frac{1}{i}$; (3) $\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$;

(4) $i^8-4i^{21}+i$; (5) $\frac{1+2i}{3-4i}-\frac{2-i}{5i}$; (6) $\frac{3+i}{i}-\frac{10i}{3-i}$.

解. (1) 由于

$$z=\frac{1}{3+2i}=\frac{3-2i}{13}$$

位于第四象限, 因此

$$\operatorname{Re} z=\frac{3}{13},\quad \operatorname{Im} z=-\frac{2}{13},\quad \overline{z}=\frac{3+2i}{13},\quad |z|=\frac{\sqrt{13}}{13},\quad \arg z=-\arctan\frac{2}{3}.$$

(2) 由于

$$z=\frac{3i}{1-i}-\frac{1}{i}=\frac{3i(1+i)}{2}+i=\frac{-3+5i}{2}$$

位于第二象限, 因此

$$\operatorname{Re} z=-\frac{3}{2},\quad \operatorname{Im} z=\frac{5}{2},\quad \overline{z}=\frac{-3-5i}{2},\quad |z|=\frac{\sqrt{34}}{2},\quad \arg z=\pi-\arctan\frac{5}{3}.$$

(3) 由于

$$\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}=\frac{26-7i}{2i}=-\frac{7}{2}-13i$$

位于第三象限, 因此

$$\operatorname{Re} z=-\frac{7}{2},\quad \operatorname{Im} z=-13,\quad \overline{z}=-\frac{7}{2}+13i,\quad |z|=\frac{5\sqrt{29}}{2},\quad \arg z=\arctan\frac{26}{7}-\pi.$$

(4) 由于

$$i^8-4i^{21}+i=1-4i+i=1-3i$$

位于第四象限, 因此

$$\operatorname{Re} z=1,\quad \operatorname{Im} z=-3,\quad \overline{z}=1+3i,\quad |z|=\sqrt{10},\quad \arg z=-\arctan 3.$$ ■

作业 11. (2020 年 A 卷) 如果 $(1+2i)\overline{z}=4+3i$, 求 z 及其主辐角.

解. 由于

$$\overline{z}=\frac{4+3i}{1+2i}=\frac{(4+3i)(1-2i)}{5}=\frac{10-5i}{5}=2-i,$$

因此 $z=2+i, \arg z=\arctan\frac{1}{2}$. ■

作业 12. 求下列复数 z 的三角和指数形式:

(1) i; (2) $1+i\sqrt{3}$;

(3) $3-\sqrt{3}i$; (4) $\frac{2i}{1-i}$.

解. (1) 由于 $|z|=1, \arg z=\frac{\pi}{2}$, 因此

$$z=z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi i}{2}}.$$

(2) 由于 $|z|=2, \arg z=\frac{\pi}{3}$, 因此

$$z=z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{\frac{\pi i}{3}}.$$

(3) 由于 $|z|=2\sqrt{3}, \arg z=-\frac{\pi}{6}$, 因此

$$z=2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

(4) 由于 $z=\frac{2i(1+i)}{2}=-1+i, |z|=\sqrt{2}, \arg z=\frac{3\pi}{4}$, 因此

$$z=\sqrt{2}\left[\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right]=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$ ■

作业 13. 证明当 $|z|=1>|w|$ 时, $\left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|=1$.

证明. 由于 $|z\overline{w}|=|w|<1$, 因此 $1-z\overline{w}\neq 0$. 由于

$$|z-w|^2=(z-w)(\overline{z}-\overline{w})=z\overline{z}-w\overline{z}-z\overline{w}+w\overline{w}=1-w\overline{z}-z\overline{w}+w\overline{w},$$

$$|1-z\overline{w}|^2=(1-z\overline{w})(1-\overline{z}w)=1-w\overline{z}-z\overline{w}+z\overline{z}w\overline{w}=1-w\overline{z}-z\overline{w}+w\overline{w},$$

因此 $|z-w|=|1-z\overline{w}|, \left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|=1$. ■

作业 14. 证明如果复数 $a+ib$ 是实系数方程

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$

的根, 则 $a-ib$ 也是它的根.

证明. 两边取共轭即可. ■

1.3 复数的乘除、方幂与方根

作业 15. 填空题: (2020 年 B 卷) 复数 $\left[\dfrac{(1+i)^2}{2}\right]^{2021}$ 的模是 $\underline{\quad 1 \quad}$.

解析. 因为 $\left|\frac{(1+i)^2}{2}\right| = |i| = 1$, 所以答案是 1. ■

作业 16. 将 $z = \dfrac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5}{(\cos\varphi - i\sin\varphi)^3}$ 写成三角形式和指数形式.

解.

$$z = \frac{e^{5\varphi i}}{e^{-3\varphi i}} = e^{8\varphi i} = \cos 8\varphi + i\sin 8\varphi.$$ ■

作业 17. 计算

(1) $(\sqrt{3}-i)^5$; (2) $(1+i)^6$; (3) $\sqrt[6]{-1}$;

(4) $\sqrt[4]{-2+2i}$; (5) $\sqrt[4]{-2}$; (6) $(1-i)^{1/3}$.

解. (1) 由于 $\sqrt{3}-i = 2e^{-\frac{\pi i}{6}}$, 因此

$$(\sqrt{3}-i)^5 = 2^5 e^{-\frac{5\pi i}{6}} = 32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -16\sqrt{3} - 16i.$$

(2) 由于 $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$, 因此

$$(1+i)^6 = 8e^{\frac{6\pi i}{4}} = -8i.$$

(3) 由于 $-1 = e^{\pi i}$, 因此

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{-1} &= \exp\left(\frac{\pi+2k}{6}i\right), \quad k = 0,1,2,3,4,5 \\ &= \exp\left(\frac{\pi i}{6}\right), \exp\left(\frac{3\pi i}{6}\right), \exp\left(\frac{5\pi i}{6}\right), \exp\left(\frac{7\pi i}{6}\right), \exp\left(\frac{9\pi i}{6}\right), \exp\left(\frac{11\pi i}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}+i}{2}, i, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}-i}{2}.\end{aligned}$$

(4) 由于 $-2+2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}$, 因此

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{-2+2i} &= \sqrt[8]{8}\exp\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k}{4}i\right), \quad k = 0,1,2,3 \\ &= \sqrt[8]{8}\exp\left(\frac{3\pi i}{16}\right), \sqrt[8]{8}\exp\left(\frac{11\pi i}{16}\right), \sqrt[8]{8}\exp\left(\frac{19\pi i}{16}\right), \sqrt[8]{8}\exp\left(\frac{27\pi i}{16}\right).\end{aligned}$$

(5) 由于 $-2 = 2e^{\pi i}$, 因此

$$
\begin{aligned}
\sqrt[4]{-2} &= \sqrt[4]{2}\exp\left(\frac{\pi+2k}{4}i\right), \quad k=0,1,2,3,\\
&= \sqrt[4]{2}\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right), \sqrt[4]{2}\exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right), \sqrt[4]{2}\exp\left(\frac{5\pi i}{4}\right), \sqrt[4]{2}\exp\left(\frac{7\pi i}{4}\right)\\
&= \frac{1+i}{\sqrt[4]{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1+i}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1-i}{\sqrt[4]{2}}.
\end{aligned}
$$

(6) 由于 $1-i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}$, 因此

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{1-i} &= \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2k}{3}i\right), \quad k=0,1,2,\\
&= \sqrt[6]{2}\exp\left(-\frac{\pi i}{12}\right), \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{7\pi i}{12}\right), \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{15\pi i}{12}\right)\\
&= \sqrt[6]{2}\exp\left(-\frac{\pi i}{12}\right), \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{7\pi i}{12}\right), -\frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}.
\end{aligned}
$$
■

作业 18. (2021 年 A 卷) 解方程 $z^3+8=0$.

解. 由于 $-8 = 8e^{\pi i}$, 因此

$$
\begin{aligned}
z = \sqrt[3]{-8} &= 2\exp\left(\frac{\pi+2k}{3}i\right), \quad k=0,1,2,\\
&= 2\exp\left(\frac{\pi i}{3}\right), 2\exp\left(\frac{3\pi i}{3}\right), 2\exp\left(\frac{5\pi i}{3}\right)\\
&= 1+i\sqrt{3}, -2, 1-i\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$
■

作业 19. 如果 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$. 证明 $|z_1-z_2| = |z_2-z_3| = |z_3-z_1|$ 并说明这些等式的几何意义.

解. 设 $z_2-z_1 = \lambda(z_3-z_1)$, 则 $z_2-z_3 = (\lambda-1)(z_3-z_1)$,

$$
\lambda = \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} = \frac{1}{1-\lambda}.
$$

因此 $\lambda^2-\lambda+1=0$, $\lambda^3-1 = (\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+1) = 0$. 于是有 $|\lambda|=1, |1-\lambda| = |\lambda^2| = 1$, 从而

$$
|z_1-z_2| = |z_2-z_3| = |z_3-z_1|.
$$

设 z_1, z_2, z_3 对应的点为 A, B, C, 则 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ 意味着 $\angle BAC = \angle ACB$, $\dfrac{BA}{CA} = \dfrac{AC}{BC}$. 于是 $AB=BC=CA$, $\triangle ABC$ 是等边三角形. ■

作业 20. 如果 $z = e^{it}$, 证明:

(1) $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos nt$;

(2) $z^n - \dfrac{1}{z^n} = 2i\sin nt$.

证明.

$$z^n = e^{nit}, \quad \frac{1}{z^n} = e^{-nit},$$

$$z^n + \frac{1}{z^n} = e^{nit} + e^{-nit} = 2\operatorname{Re} e^{nit} = 2\cos nt.$$

$$z^n - \frac{1}{z^n} = e^{nit} - e^{-nit} = 2i\operatorname{Im} e^{nit} = 2i\sin nt.$$

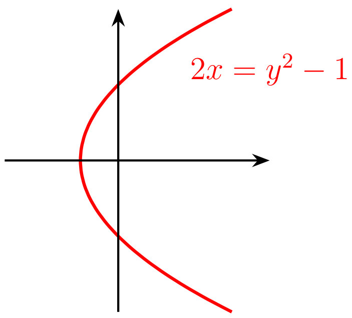
■

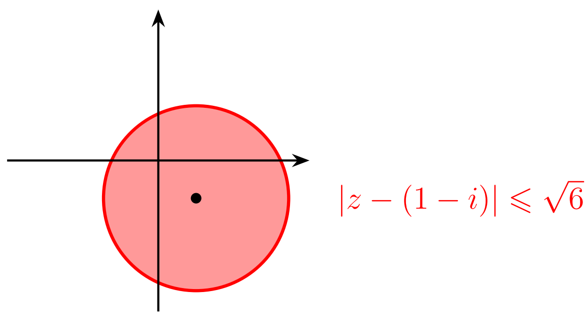
1.4　曲线和区域

作业 21. 单选题: (2020 年 A 卷) 方程 $|z| = \operatorname{Re} z + 1$ 中 z 的轨迹为 (B).

(A) 椭圆　(B) 抛物线　(C) 双曲线　(D) 直线

解析. $|z|^2 = x^2 + y^2 = (\operatorname{Re} z + 1)^2 = (x+1)^2$, 于是 $2x + 1 = y^2, x = \dfrac{y^2-1}{2}$. 而且注意到 $x > -1$, 因此该方程的轨迹就是抛物线. ■





作业 22. 单选题: (2020 年 A 卷) 不等式 $z\overline{z} - (2+i)z - (2-i)\overline{z} \leqslant 4$ 确定的是 (A).

(A) 有界单连通闭区域　(B) 无界多连通区域
(C) 无界单连通闭区域　(D) 有界多连通区域

解析. 即 $|z-(1-i)| \leqslant \sqrt{6}$, 是一个闭圆盘. ■

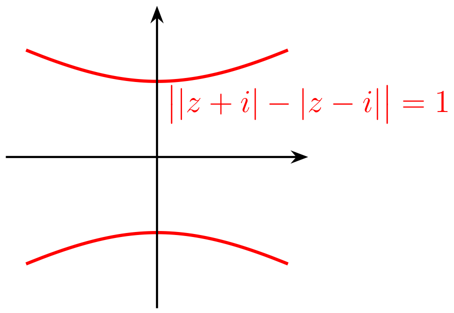
作业 23. 单选题: (2022 年 A 卷) 方程 $\big||z+i| - |z-i|\big| = 1$ 表示的是 (C).

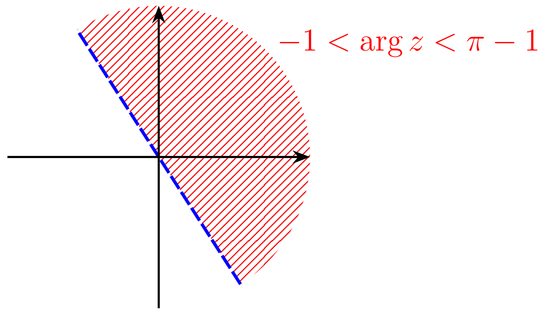
(A) 直线　(B) 不是圆的椭圆　(C) 双曲线　(D) 圆周

解析. 即以 $i, -i$ 为焦点, $1/2$ 为虚半轴 ($\sqrt{3}/2$ 为实半轴) 的双曲线. ■

作业 24. 单选题: 不等式 $-1 < \arg z < \pi - 1$ 确定是的 (C).

(A) 有界单连通闭区域　(B) 有界多连通区域
(C) 无界单连通区域　(D) 无界多连通闭区域





解析. 即角状区域. 实际上它也是直线 $y=-x\tan 1$ 右上方的区域. ■

作业 25. 用复参数方程表示连接 $-1+i$ 与 $1-4i$ 的直线段.

解. 由于 $(1-4i)-(-1+i)=2-5i$, 因此直线段方程为

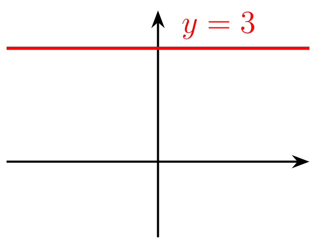
$$z=-1+i+(2-5i)t=(2t-1)+(1-5t)i,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$ ■

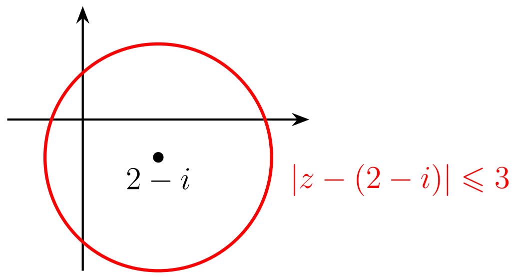
作业 26. 求下列各题中 z 的轨迹或范围, 并作图.

(1) $\mathrm{Re}(i\overline{z})=3$; (2) $z\overline{z}-(2+i)z-(2-i)\overline{z}=4$.

解. (1) 设 $z=x+yi, 3=\mathrm{Re}(i\overline{z})=\mathrm{Re}(y+xi)=y$, 所以是直线 $y=3$.

(2) 即 $|z-(2-i)|=3$, 是圆周. ■





作业 27. 描出下列不等式所确定的区域或闭区域, 并指出它是有界还是无界的, 单连通还是多连通.

(1) $\mathrm{Im}\,z\leqslant 0, \mathrm{Re}\,z\geqslant 0$; (2) $|z-1|<|z+3|$;

(3) $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right|<2$; (4) $\arg z<\dfrac{3\pi}{4}$.

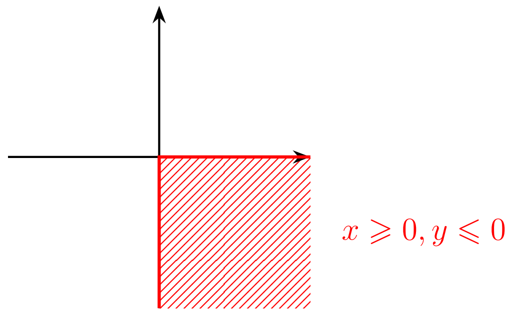
解. (1) 即第四象限, 包括边界, 它是无界单连通闭区域.

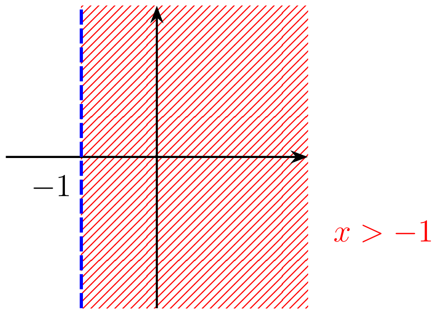
(2) 即 $(x-1)^2+y^2<(x+3)^2+y^2$, 化简得到 $x>-1$, 它是无界单连通区域.

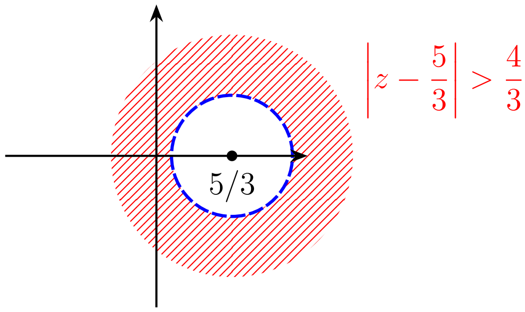
(3) 即 $(x+1)^2+y^2<4[(x-1)^2+y^2]$, 化简得到 $\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2+y^2>\dfrac{16}{9}, \left|z-\dfrac{5}{3}\right|>\dfrac{4}{3}$, 它是无界多连通区域.

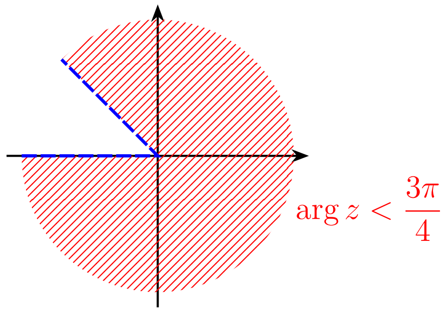
(4) 即 $\dfrac{3\pi}{4}>\arg z>-\pi$, 它无界单连通区域.

■









1.5 复变函数

作业 28. 填空题: 求区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ 在映射 $w = z^3$ 下的像 $=$ ___$0 < \arg w < \pi$___.

解析. 根据乘幂的辐角变化可知 $0 < \arg z^3 < \pi$. ■

作业 29. 填空题: (2021 年 B 卷) 已知映射 $w = z^3$, 则 $z = \sqrt{3} + i$ 在 w 复平面上的像是___$8i$___.

解析. 即 $(\sqrt{3} + i)^3 = (2e^{\frac{\pi i}{6}})^3 = 8e^{\frac{\pi i}{2}} = 8i$. ■

1.6 极限和连续性

作业 30. 填空题: (2020 年 A 卷) 极限 $\lim\limits_{z \to 1+i}(1 + z^2 + 2z^4) =$ ___$-7 + 2i$___.

解析. 由连续性可知为 $1 + (1+i)^2 + 2(1+i)^4 = 1 + 2i + 2 \cdot (-4) = -7 + 2i$. ■

作业 31. (2020 年 A 卷) 讨论极限 $\lim\limits_{z \to 0}\left(\dfrac{z}{\overline{z}} - \dfrac{\overline{z}}{z}\right)$ 是否存在. 若存在请求出具体的值, 若不存在请证明.

解. 不存在. 当 $z = (1+i)t \to 0$ 时,

$$\frac{z}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{z} = \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} = i - (-i) = 2i.$$

当 $z=t\to 0$ 时,

$$\frac{z}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}}{z}=1-1=0.$$

由于二者不等, 因此该极限不存在. ■

作业 32. 下列数列 $\{z_n\}$ 是否收敛? 如果收敛, 求出它们的极限:

(1) $z_n=\dfrac{1+ni}{1-ni}$;

(2) $z_n=\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^n$;

(3) $z_n=(-1)^n+\dfrac{i}{n+1}$;

(4) $z_n=\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]e^{-\frac{n\pi i}{2}}$;

(5) $z_n=\dfrac{(3+2i)^n}{(3+4i)^n}$.

解. (1)

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+ni}{1-ni}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+i}{\frac{1}{n}-i}=\frac{i}{-i}=-1.$$

(2) 由于

$$\lim_{n\to\infty}|z_n|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}=0,$$

因此 $\{z_n\}$ 的极限是 0.

(3) 由于 $\{z_n\}$ 的实部数列 $\{(-1)^n\}$ 不收敛, 因此 $\{z_n\}$ 不收敛.

(4) 由于 $\{z_n\}$ 的实部数列 $\left\{\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}$ 不收敛, 因此 $\{z_n\}$ 不收敛.

(5) 由于 $|z_n|=\left(\dfrac{\sqrt{13}}{5}\right)^n\to 0$, 因此 $\{z_n\}$ 的极限是 0. ■

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 33. 我们知道, 对于任意两个集合 A,B, 我们可以定义 $A\to B$ 的映射. 在数学中, 很多对象是带有 "结构" 的集合, 例如实线性空间 V 是一个拥有如下结构:

$$\text{零元 } 0\in V;\qquad \text{加法 } v_1+v_2\in V;\qquad \text{数乘 } \lambda v,$$

且满足一些特定性质的集合. 如果 A,B 具有同一种结构, 映射 $f:A\to B$ "保持" 了这些结构, 则我们称 f 是同态. 例如实线性空间之间的同态就是指一个映射 $f:V\to W$, 使得

$$f(0)=0;\qquad f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2);\qquad f(\lambda v)=\lambda f(v).$$

再比如域是带有如下结构:

零元 0; 幺元 1; 加法; 减法; 乘法; 除法,

且满足特定性质的集合 (交换律分配律之类的). 所以域之间的同态就是指一个 $f: F \to K$, 使得

- $f(0)=0, \qquad f(1)=1;$
- $f(x+y)=f(x)+f(y), \qquad f(x-y)=f(x)-f(y);$
- $f(xy)=f(x)f(y), \qquad f(x/y)=f(x)/f(y).$

如果一个同态是双射 (一一对应), 则称之为同构.

(1) 设 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ 是有理数域之间的同构, 证明 f 只能是恒等映射.

(2) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是实数域之间的连续的同构, 证明 f 只能是恒等映射.

(3) 设 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是复数域之间的连续的同构, 证明 f 只能是恒等映射或复共轭.

(4) 如果 $F=\mathbb{R}+\mathbb{R}t$ 是一个真包含 $\mathbb{R}$ 的域, 证明 F 同构于 $\mathbb{C}$.

(5) 设

$$F=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}: x,y\in\mathbb{R}\right\}=\{xE+yJ: x,y\in\mathbb{R}\}\subseteq M_2(\mathbb{R}),$$

其中 $E=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$. 证明 F 是一个域且同构于 $\mathbb{C}$.

作业 34. 满足 $z^n=1$ 的复数 z 被称为 n 次单位根. 不难看出 $z=e^{\frac{2k\pi i}{n}}, k=0,1,\ldots,n-1$. 单位根在代数, 几何和组合中有着丰富的应用. 我们来看一个例子. 设集合 $A=\{1,2,\ldots,2023\}$.

(1) 集合 A 有多少个子集? 试着将 A 的每一个子集与

$$N(x)=\prod_{a=1}^{2023}(1+x^a)$$

的展开式中的每一项建立一个一一对应.

(2) 设 $S\subseteq A$. 定义

$$f(S)=\prod_{a\in S}x^a=x^{\sum_{a\in S}a}.$$

证明所有的 S 对应的 $f(S)$ 之和就是 $N(x)$.

(3) 证明 $N(x)$ 的展开式合并同类项后 x^k 的系数就是 A 的那些满足元素之和是 k 的子集的个数.

(4) 现在我们想知道 A 有多少个子集满足元素之和是 5 的倍数. 令 x 是 5 次单位根, 则 $N(x)$ 可以表为

$$N(x)=N_0+N_1x+N_2x^2+N_3x^3+N_4x^4,$$

那么 N_0 就是元素之和是 5 的倍数的集合个数.

(5) 当 $x=1$ 时, 显然 $N(1)=2^{2023}$. 当 $x\neq 1$ 是 5 次单位根时, $1,x,x^2,x^3,x^4$ 是方程 $X^5-1=0$ 的所有根, 所以 $2,1+x,1+x^2,1+x^3,1+x^4$ 是方程 $(X-1)^5-1=0$ 的所有根. 由韦达定理可知

$$(1+x^0)(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)=2.$$

由此证明

$$N(x)=2^{404}(1+x^0)(1+x)(1+x^2)=2^{405}(1+x+x^2+x^3).$$

(6) 计算 $N(1)+N(e^{2\pi i/5})+N(e^{4\pi i/5})+N(e^{6\pi i/5})+N(e^{8\pi i/5})$. 由此得到 $N_0=\dfrac{2^{2023}+4\cdot 2^{405}}{5}$.

(7) 想一想, N_1,N_2,N_3,N_4 分别是多少?

更多细节可见: https://www.bilibili.com/video/BV1R34y1W7Xn/