第六章　积分变换

作业 1. 单选题: (2020 年 A 卷) 下列不是傅里叶变换对的是 (C).

(A) $\delta(t), 1$　　(B) $e^{j\omega_0 t}, 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

(C) $\sin\omega_0 t, \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$　　(D) $1, 2\pi\delta(\omega)$

作业 2. 填空题: (2020 年 B 卷) $\delta(t-t_0)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)=$ $\underline{\quad e^{-j\omega t_0}\quad}$.

作业 3. 填空题: (2021 年 A 卷) $F(\omega)=\delta(\omega+2)$ 的傅里叶逆变换为 $f(t)=$ $\underline{\quad \frac{1}{2\pi}e^{-2jt}\quad}$.

作业 4. 填空题: (2021 年 B 卷) $F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$ 的傅里叶逆变换为 $f(t)=$ $\underline{\quad 1\quad}$.

作业 5. 填空题: (2022 年 A 卷) $f(t)=\sin t+j\cos t$ 的傅里叶变换为 $\underline{\quad 2\pi j\delta(\omega+1)\quad}$.

作业 6. (2020 年 A 卷) 用拉普拉斯变换解微分方程

$$\begin{cases} y''+4y'+3y=e^{-t}, \\ y(0)=y'(0)=1. \end{cases}$$

解. 设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y']=sY-y(0)=sY-1,$$

$$\mathscr{L}[y'']=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-s-1,$$

因此

$$s^2Y-s-1+4(sY-1)+3Y=\mathscr{L}[e^{-t}]=\frac{1}{s+1},$$

$$Y(s)=\frac{1}{2(s+1)^2}+\frac{7}{4(s+1)}-\frac{3}{4(s+3)},$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{7}{4}e^{-t}-\frac{3}{4}e^{-3t}.$$

■

作业 7. (2020 年 B 卷) 用拉普拉斯变换解微分方程

$$\begin{cases} y''+y=t, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=-2. \end{cases}$$

解. 设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y'']=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-s+2,$$

因此

$$\begin{aligned}
s^2Y-s+2+Y&=\mathscr{L}[t]=\frac{1}{s^2},\\
Y(s)&=\frac{1}{s^2}-\frac{3}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1},\\
y(t)&=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=t-3\sin t+\cos t.
\end{aligned}$$

■

作业 8. (2021 年 A 卷) 用拉普拉斯变换解微分方程

$$\begin{cases} y''+4y'+3y=e^t,\\ y(0)=0,\quad y'(0)=2.\end{cases}$$

解. 设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y']=sY-y(0)=sY,$$

$$\mathscr{L}[y'']=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-2,$$

因此

$$\begin{aligned}
s^2Y-2+4sY+3Y&=\mathscr{L}[e^t]=\frac{1}{s-1},\\
Y(s)&=\frac{1}{8(s-1)}+\frac{3}{4(s+1)}-\frac{7}{8(s+3)},\\
y(t)&=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{8}e^t+\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{7}{8}e^{-3t}.
\end{aligned}$$

■

作业 9. (2021 年 B 卷) 用拉普拉斯变换解微分方程

$$\begin{cases} y''-3y'+2y=2e^{-t},\\ y(0)=2,\quad y'(0)=-1.\end{cases}$$

解. 设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y']=sY-y(0)=sY-2,$$

$$\mathscr{L}[y'']=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-2s+1,$$

因此

$$\begin{aligned}
s^2Y-2s+1-3(sY-2)+2Y&=\mathscr{L}[2e^{-t}]=\frac{2}{s+1},\\
Y(s)&=\frac{4}{s-1}+\frac{1}{3(s+1)}-\frac{7}{3(s-2)},\\
y(t)&=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=4e^t+\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{7}{3}e^{2t}.
\end{aligned}$$

■

作业 10. 用拉普拉斯变换解微分方程

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 3\cos t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

解. 设 $\mathscr{L}[y] = Y$, 则

$$\mathscr{L}[y'] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y,$$

因此

$$s^2Y + 4Y = \frac{3s}{s^2+1},$$

$$Y(s) = \frac{3s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4},$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = \cos t - \cos(2t).$$ ■

作业 11. 用拉普拉斯变换解微分方程

$$\begin{cases} x'(t) + 2x(t) + 2y(t) = 10e^{2t}, \\ -2x(t) + y'(t) + 3y(t) = 13e^{2t}, \\ x(0) = 1, y(0) = 3. \end{cases}$$

解. 设 $\mathscr{L}[x] = X, \mathscr{L}[y] = Y$, 则

$$\begin{cases} sX - 1 + 2X + 2Y = 10/(s-2), \\ -2X + sY - 3 + 3Y = 13/(s-2). \end{cases}$$

因此

$$X(s) = \frac{1}{s-2}, \quad Y(s) = \frac{3}{s-2},$$

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] = e^{2t}, \quad y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{s-2}\right] = 3e^{2t}.$$ ■

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 12. 对于正奇数 k, 设 $F_k(\omega) = \dfrac{\sin(\omega/k)}{\omega/k}$, 设

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega)F_3(\omega)\cdots F_k(\omega)\,\mathrm{d}\omega.$$

则

$$I_1 = I_3 = I_5 = \cdots = I_{13} = \pi, \quad I_{15} = \frac{467807924713440738696537864469}{467807924720320453655260875000}\pi.$$

这是为什么呢?

(1) 根据

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F_1]=\begin{cases}1/2, & |t|<1,\\ 1/4, & |t|=1,\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

得到 $\mathscr{F}^{-1}[F_k]=f_k(t):=kf(kt)$.

(2) 注意到函数 $g(t)$ 和 $f_k(t)$ 卷积之后在 t 处的值相当于 $g(t)$ 在 $\left[t-\frac{1}{k},t+\frac{1}{k}\right]$ 上取平均值. 由此证明 $f_1(t)*f_3(t)*\cdots*f_k(t)$ 在 $|t|<1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\cdots-\frac{1}{k}$ 上取值为 $\frac{1}{2}$.

(3) 根据

$$\frac{1}{2\pi}I_k=\mathscr{F}^{-1}[F_1F_3\cdots F_k](0)=(f_1*f_3*\cdots*f_k)(0)$$

解释上述现象.

更多细节可见: https://www.bilibili.com/video/BV18e4y1u7BH/