第四章　级数

4.1　复数项级数

作业 1. 单选题: (2021 年 A 卷) 下列级数中发散的是 (D).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\ln(in)}\right]^n$　　(C) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{5^n}$　　(D) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(in)}{2^n}$

解析. A 的实部级数和虚部级数

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots, \quad \frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots$$

都是交错级数, 从而条件收敛. 所以 A 条件收敛.

B 中

$$|z_n| = \left|\frac{1}{\ln n + \frac{\pi i}{2}}\right|^n \leqslant \left(\frac{1}{\ln 3}\right)^n, \quad n \geqslant 3,$$

因此绝对收敛.

C 中 $|z_n| \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n$, 因此绝对收敛.

D 中

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(in)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2e}\right)^n,$$

因此发散. ■

作业 2. 单选题: (2021 年 B 卷) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n i}{\sqrt{n}}\right]$ 的敛散性是 (D).

(A) 无法判断　　(B) 条件收敛　　(C) 绝对收敛　　(D) 发散

解析. 由于实部是调和级数, 发散, 虚部是交错级数, 条件收敛, 因此原函数发散. ■

作业 3. 判断下列级数的绝对收敛性与收敛性:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$;　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6+5i)^n}{8^n}$;　　(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}(1+2i)^n$.

解. (1) 由于它的实部级数和虚部级数

$$-\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 6}+\cdots, \quad -\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 5}-\frac{1}{\ln 7}+\cdots$$

都是交错级数, 从而条件收敛. 所以该级数条件收敛.

(2) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\frac{\sqrt{61}}{8}<1,$$

因此该级数绝对收敛.

(3) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2\sqrt{5}}\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}<1,$$

因此该级数绝对收敛. ■

4.2 幂级数

作业 4. 单选题: (2022 年 A 卷) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(iz)^n$ 的收敛半径是 (C).

(A) i (B) $-i$ (C) 1 (D) $+\infty$

解析. 根据比值法 $r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=|i|=1$, $R=\frac{1}{r}=1$. ■

作业 5. 填空题: (2020 年 B 卷) 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n$ 在点 $z=3$ 发散，则 (B).

(A) 在点 $z=-1$ 收敛 (B) 在点 $z=-3$ 发散

(C) 在点 $z=2$ 收敛 (D) 以上都不对

解析. 根据阿贝尔定理, 该级数在 $|z-1|>|3-1|=2$ 内发散, 在 $|z-1|<|3-1|=2$ 内收敛. ■

作业 6. 填空题: (2020 年 A 卷) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 的收敛半径为 $\underline{\quad\frac{\sqrt{2}}{2}\quad}$.

解析. 根据比值法 $r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=|1+i|=\sqrt{2}$, $R=\frac{1}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

作业 7. 填空题: (2020 年 B 卷) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(z-1)^n$ 的收敛半径为 $\underline{\quad 1\quad}$.

解析. 根据比值法 $r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1$, $R=\frac{1}{r}=1$. ■

作业 8. 填空题: (2021 年 B 卷) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}z^n$ 的收敛半径为$\underline{\quad e \quad}$.

解析. 根据比值法 $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\dfrac{1}{e}$, $R=\dfrac{1}{r}=e$. ■

作业 9. 判断题:

(1) 任一幂级数在它的收敛圆周上处处收敛. (×)

(2) 幂级数的和函数在收敛圆周内可能有奇点. (×)

(3) 任一在 z_0 可导的函数一定可以在 z_0 的邻域内展开成泰勒级数. (×)

解析. (1) 错误, 例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$ 的收敛半径是 1, 但在 $z=1$ 处发散.

(2) 错误, 每一个幂级数的和函数在收敛圆周内处处解析.

(3) 错误, 需要在 z_0 处解析才行. 例如 $f(z)=z\bar{z}$ 在 0 处可导但不解析. ■

作业 10. 求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^p}$ (p 为正整数);

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}z^n$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n(z+i)^n$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{\frac{\pi i}{n}}z^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z-2}{\ln in}\right)^n$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+a^n)z^n$, 其中 a 是正实数.

解. (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^p}{n^p}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^p=1$, 因此收敛半径为 1.

(2) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!}\cdot\dfrac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}=\dfrac{1}{e}$, 因此收敛半径为 e.

(3) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}|1+i|=\sqrt{2}$, 因此收敛半径为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(4) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=1$, 因此收敛半径为 1.

(5) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{|\ln in|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{(\ln n)^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}}=0$, 因此收敛半径为 $+\infty$.

(6) 当 $a>1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n+1}{a^n}+a}{\dfrac{n}{a^n}+1}=a$, 因此收敛半径为 $\dfrac{1}{a}$.

当 $0<a\leqslant 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1+a^{n+1}}{n}}{1+\dfrac{a^n}{n}}=1$, 因此收敛半径为 1. ■

作业 11. 证明: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ 存在 ($\neq\infty$), 下列三个幂级数有相同的收敛半径

$$\sum c_n z^n;\quad \sum \frac{c_n}{n+1}z^{n+1};\quad \sum n c_n z^{n-1}.$$

证明. 设 $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=|\lambda|,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}/(n+1)}{c_n/n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\cdot\frac{n}{n+1}=|\lambda|,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)c_{n+1}}{nc_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\cdot\frac{n+1}{n}=|\lambda|,$$

因此三者的收敛半径相同, 均为 $\dfrac{1}{|\lambda|}$. ■

4.3 泰勒级数

作业 12. 函数 $f(z)=\dfrac{e^{1/z}}{z+1}$ 在 $z_0=i$ 处的泰勒展开成立的最大圆域是 $|z-i|<$ ___1___.

解析. 泰勒展开成立的最大圆域半径是展开的中心点离最近奇点距离, 所以是 $|i-0|=1$. ■

作业 13. 把下列各函数展开成 z 的幂级数, 并指出它们的收敛半径:

(1) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$; (2) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$; (3) $e^z\cos z$.

解. (1) 由于 $\pm i$ 是奇点, 因此该函数在 $|z|<1$ 内解析. 当 $|z|<1$ 时,

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\left(\frac{1}{1+z}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n,$$

$$\frac{1}{(1+z^2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{2n}=1-2z^2+3z^4-4z^6+\cdots,\quad |z|<1.$$

(2) 由于 $1,2$ 是奇点, 因此该函数在 $|z|<1$ 内解析. 当 $|z|<1$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)}&=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}+\frac{1}{z-1}\\&=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n z^n+\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1-2^{-n-1})z^n,\quad |z|<1.\end{aligned}$$

(3) 该函数处处解析.

$$e^z\cos z=\frac{1}{2}(e^{z+iz}+e^{z-iz})=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}n!\cos\frac{n\pi}{4}z^n$$
$$=1+z-\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{6}z^4-\frac{1}{30}z^5+\frac{8}{7!}z^7+\frac{16}{8!}z^8+\cdots,\quad |z|<+\infty.$$ ■

作业 14. 求下列各函数在指定点 z_0 处的泰勒展开式, 并指出它们的收敛半径:

(1) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0=2$; (2) $\dfrac{1}{z^2}, z_0=-1$;

(3) $\arctan z=-\dfrac{i}{2}\ln\dfrac{1+iz}{1-iz}, z_0=0$.

解. (1) 由于 $-1,-2$ 是奇点, 因此该函数在 $|z-2|<3$ 内解析.

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z+1)(z+2)}&=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}=\frac{2}{4+(z-2)}-\frac{1}{3+(z-2)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{4}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{2n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-2)^n,\quad |z-2|<3.\end{aligned}$$

(2) 由于 0 是奇点, 因此该函数在 $|z+1|<1$ 内解析.

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n,\quad |z+1|<1,$$
$$\frac{1}{z^2}=\left(-\frac{1}{z}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(z+1)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)(z+1)^n,\quad |z+1|<1.$$

(3) 该函数的奇点为 $iz,|z|\geqslant 1$, 因此该函数在 $|z|<1$ 内解析.

$$(\arctan z)'=\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n},\quad |z|<1,$$

$$\arctan z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}=z-\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5-\frac{1}{7}z^7+\cdots,\quad |z|<1.$$ ■

4.4 洛朗级数

作业 15. (2020 年 A 卷) 将函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$ 分别在下列区域内展开成洛朗级数

(1) $0<|z|<1$; (2) $1<|z|<+\infty$.

解. (1) 注意到

$$f(z)=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+\frac{2}{z-1}.$$

因此当 $0<|z|<1$ 时,

$$f(z)=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}2z^n.$$

(2) 因此当 $1<|z|<+\infty$ 时,

$$f(z)=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{z^n}.$$

■

作业 16. (2020 年 B 卷) 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)(z-2)}$ 分别在下列区域内展开成洛朗级数

(1) $0<|z-1|<1$; (2) $2<|z|<+\infty$.

解. (1) 注意到

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}.$$

因此当 $0<|z-1|<1$ 时,

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{1-(z-1)}=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n.$$

(2) 当 $2<|z|<+\infty$ 时,

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2^n}{z^n}.$$

■

作业 17. (2021 年 A 卷) 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z-2}$ 分别在下列区域内展开成洛朗级数

(1) $1<|z|<2$; (2) $0<|z-1|<1$.

解. (1) 注意到

$$f(z)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}\right).$$

因此当 $1<|z|<2$ 时,

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z}{2}}\right)\\&=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n.\end{aligned}$$

(2) 当 $0<|z-1|<1$ 时,

$$f(z)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}\right)=\frac{1}{3(z-1)}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{3}}$$
$$=\frac{1}{3(z-1)}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2}(z-1)^n.$$

作业 18. (2021 年 B 卷) 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$ 分别在下列区域内展开成洛朗级数

(1) $1<|z|<2$; (2) $0<|z+1|<1$.

解. (1) 注意到

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}.$$

因此当 $1<|z|<2$ 时,

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{z}}=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

(2) 当 $0<|z+1|<1$ 时,

$$f(z)=-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{1-(z+1)}=-\frac{1}{z+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n.$$

作业 19. 将 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)}$ 在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解. 由于 0 是奇点, $f(z)$ 在 $0<|z-2|<2$ 内解析.

$$f(z)=\frac{1}{z(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{2+z-2}$$
$$=\frac{1}{2(z-2)}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{2}}=\frac{1}{2(z-2)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{2}\right)^n$$
$$=\frac{1}{2(z-2)}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(z-2)^n.$$

作业 20. 将函数 $e^{1/(1-z)}$ 在圆环域 $1<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

解. 由于当 $|z|<1$ 时,

$$\begin{aligned}\left(\frac{z}{z-1}\right)^k &= (-1)^k z^k (1-z)^{-k}\\ &= (-1)^k z^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)(-k-1)\cdots(-k-n+1)}{n!}(-z)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)(-k-1)\cdots(-k-n+1)}{n!}(-z)^{n+k}\\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-k)(-k-1)\cdots(-n+1)}{(n-k)!}(-z)^n = \sum_{n=k}^{\infty}(-1)^k \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} z^n,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}e^{\frac{z}{z-1}} &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{z}{z-1}\right)^k\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}}{k!} z^n\\ &= 1-z-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\cdots,\end{aligned}$$

因此当 $1<|z|<+\infty$ 时,

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{1-z}} = e^{\frac{1/z}{1/z-1}} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}}{k!} z^{-n}\\ &= 1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{6z^3}+\frac{1}{24z^4}+\cdots, \quad 1<|z|<+\infty.\end{aligned}$$

■

作业 21. 将 $z^3\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ 在圆环域 $0<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

解.

$$\begin{aligned}z^3\exp\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-3}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!z^n}+\frac{1}{6}+\frac{z}{2}+z^2+z^3\\ &= \cdots+\frac{1}{24z}+\frac{1}{6}+\frac{z}{2}+z^2+z^3, \quad 0<|z|<+\infty.\end{aligned}$$

■

作业 22. 下列结论是否正确? 用长除法得

$$\begin{aligned}\frac{z}{1-z} &= z+z^2+z^3+z^4+\cdots,\\ \frac{z}{z-1} &= 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots,\end{aligned}$$

因为 $\frac{z}{1-z}+\frac{z}{z-1}=0$, 所以

$$\cdots+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots=0.$$

解. 不正确, 因为两个式子成立的条件分别是 $|z|<1$ 和 $|z|>1$, 所以二者并不能相加. 事实上, 最后一个双边幂级数的处处发散. ■

作业 23. 如果 C 为正向圆周 $|z|=3$, 求积分 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 的值, 其中 $f(z)$ 为:

(1) $\dfrac{1}{z(z+2)}$; (2) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$.

解. (1) C 落在圆环域 $2<|z|<+\infty$ 内, 此时

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n\right]=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2)^{n-2}}{z^n}.$$

因此

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}=0.$$

(2) C 落在圆环域 $1<|z+1|<+\infty$ 内, 此时

$$f(z)=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}=\frac{2}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-z-1)^{-n}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{(z+1)^n}.$$

因此

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}=2\pi i.$$

■

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 24. 设解析函数 $f(z)$ 满足 $f(\zeta z)=\zeta^k f(z)$, 其中 $\zeta=e^{2\pi i/m}$ 是 m 次单位根.

(1) 归纳证明 $f^{(n)}(\zeta z)=\zeta^{k-n}f^{(n)}(z)$.

(2) 证明 $f(z)$ 的麦克劳林展开只有 $ml+k$ 次项, $l\in\mathbb{Z}$.

作业 25. 设 $f(z)=\ln z$, $z_0=-3+4i$.

(1) 求 $f(z)$ 在 z_0 处的泰勒展开, 并说明它成立的圆域半径是 4.

(2) 证明上述幂级数的收敛半径是 5? 为什么比 4 大?

作业 26. 设 $P(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 是有理函数, 且其 (既约) 分母为

$$g(z)=(z-\lambda_1)^{d_1}\cdots(z-\lambda_m)^{d_m},$$

其中 $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\cdots\leqslant|\lambda_m|$.

设 $r=|\lambda_k|<R=|\lambda_{k+1}|$. 证明 $P(z)$ 在圆环域 $r<|z|<R$ 内的洛朗展开形如

$$h(z)+\sum_{n\geqslant 0}\left[\frac{\alpha_1(n)}{\lambda_1^n}+\cdots+\frac{\alpha_k(n)}{\lambda_k^n}\right]z^n+\sum_{n<0}\left[\frac{\alpha_{k+1}(n)}{\lambda_{k+1}^n}+\cdots+\frac{\alpha_m(n)}{\lambda_m^n}\right]z^n,$$

其中 $h(z)$ 是只有有限多项的双边幂级数, $\alpha_t(n)$ 是 n 的多项式, 次数为 d_t.