



合肥工业大学
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

数学 (下)

主讲教师: 汪任, 张神星 (代课)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: <https://zhangshenxing.gitee.io>

本课程共 16 周 80 课时 (2023/02/20~2023/06/09).
前八周上课时间是周一四, 后八周上课时间是周一三四.



课程 QQ 群

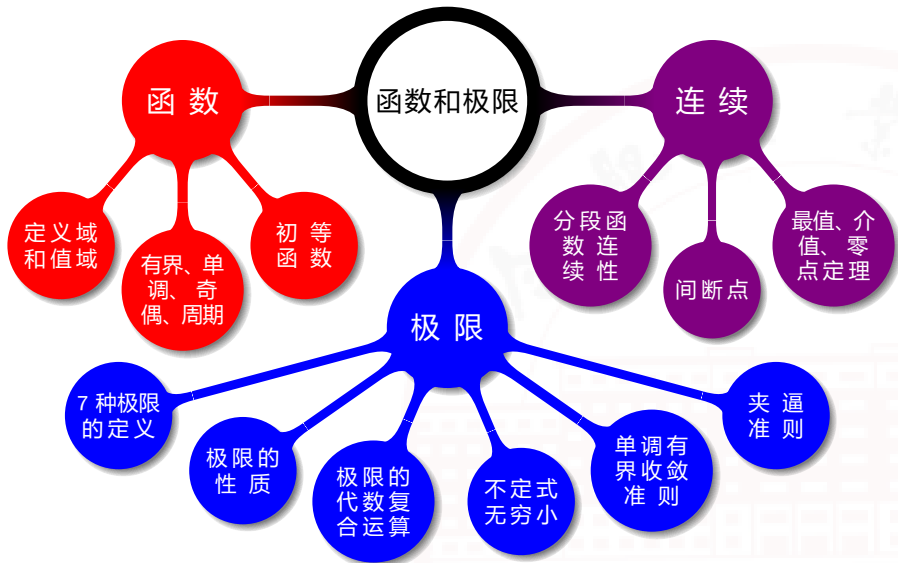
群号: 561271638

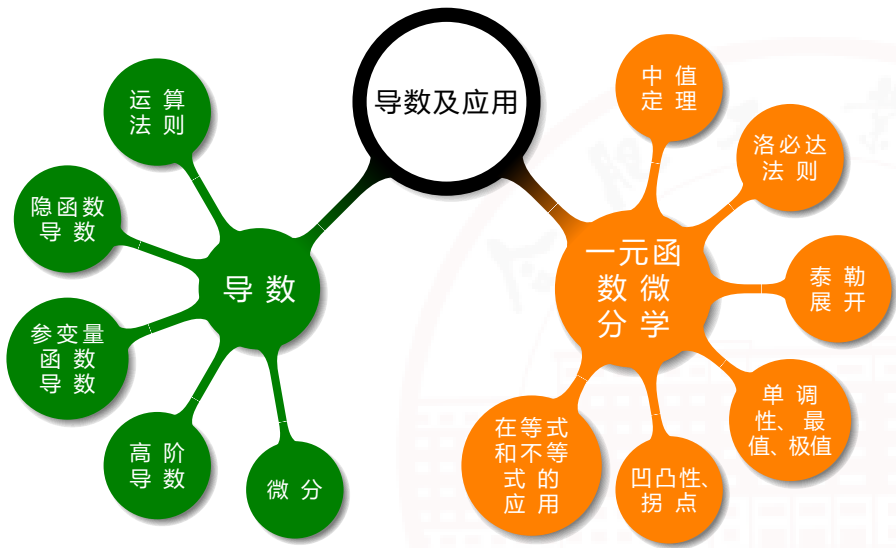
答案 034Y01

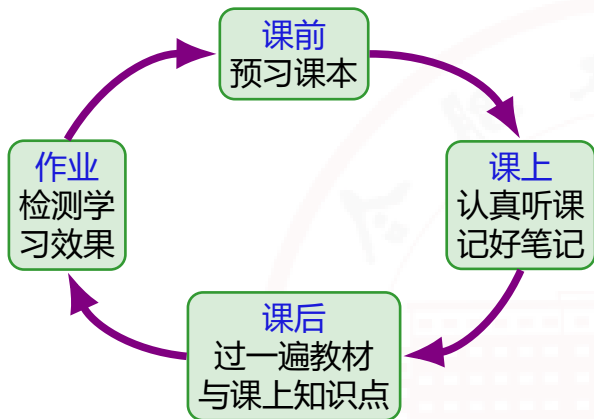


教材

朱士信 唐烁主编
《高等数学》上册







第一章 函数

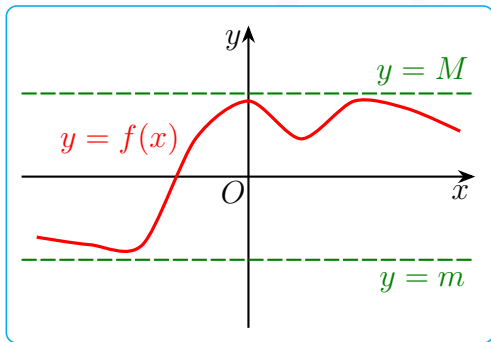
第一节 函数的概念

第二节 函数的几种特征

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D . 如果 $f(x)$ 的值域包含在一个有限区间 $[m, M]$ 内, 则称 $f(x)$ 有界. 否则称 $f(x)$ 无界.

$f(x)$ 有界等价于: $\exists M > 0$ 使得 $\forall x \in D, |f(x)| \leq M$.



第三节 初等函数

定义

由基本初等函数进行有限次的四则运算和有限次的复合运算所得到的函数被称为**初等函数**.

例

- $y = \frac{x^2}{x-1}$;
- $y = \sin(2x+1)$;
- $y = |x| = \sqrt{x^2}$.
- $y = \operatorname{sgn} x, y = [x]$ 不是初等函数.

下面介绍两类在工程上常用的初等函数.

第四节 一些常用不等式和等式

三角函数的基本不等式

三角函数的基本不等式

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 有 $\sin x < x < \tan x$.

证明

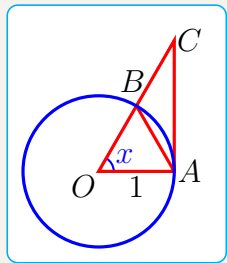
作半径为 1 的圆, 如图所示. 由

$\triangle OAB$ 的面积 $<$ 扇形 OAB 的面积 $<$ 直角 $\triangle OAC$ 的面积

可知

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x.$$

从而命题得证. □



结论

$$\sin x \begin{cases} < x, & x > 0, \\ = x, & x = 0, \\ > x, & x < 0. \end{cases} \text{ 从而有 } |\sin x| \leq |x|.$$

证明

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 由前一结论有 $\sin x < x$. 当 $x \geq \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\sin x \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x.$$

故 $f(x) = x - \sin x > 0, \forall x > 0$.

注意到 $f(x)$ 是奇函数, 因此 $x < 0$ 时, $f(x) = -f(-x) < 0$. □

第五节 极坐标简介

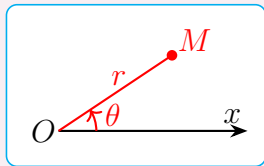
在平面直角坐标系中, 我们想要描述一个点或一条曲线的平移是很容易的, 只需要将 x, y 做相应变换. 但有时我们需要考虑点或曲线的旋转, 此时极坐标就比直角坐标更为方便.

定义

在平面内取一个定点 O (极点), 引一条射线 Ox (极轴), 再选定一个长度单位和角度的正方向 (通常取逆时针方向), 所建立的坐标系称为极坐标系.

对于平面内任意一点 M ,

- M 的极径是指线段 OM 的长度 r ,
- M 的极角是指从 Ox 到 OM 的角度 θ ,
- M 的极坐标是指有序对 (r, θ) .



例题: 求极坐标方程

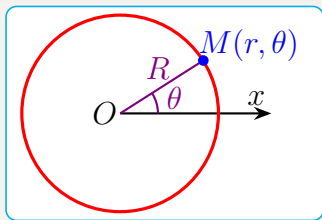
类似于直角坐标系, 我们可以用 r 和 θ 的方程来表示平面上的图形. 求曲线的极坐标方程也和直角坐标系类似.

例

求圆心在极点 O , 半径为 R 的圆的极坐标方程.

解

$M(r, \theta)$ 在圆上 $\iff r = OM = R$.
因此该圆的极坐标方程为 $r = R$.



另解

圆的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = R^2$. 这等价于 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = R$. 此即该圆的极坐标方程.

例题: 求极坐标方程

例

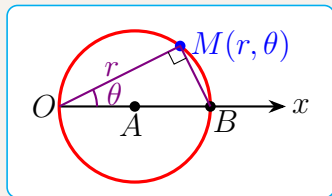
求圆心为 $A(R, 0)$, 半径为 R 的圆的极坐标方程.

解

$M(r, \theta)$ 在圆上 $\iff OM \perp BM$

$\iff r = OM = 2R \cos \theta.$

所以极坐标方程为 $r = 2R \cos \theta.$



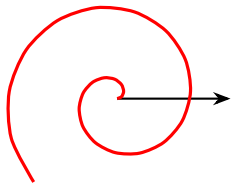
另解

圆的直角坐标方程为 $(x - R)^2 + y^2 = R^2$. 这等价于

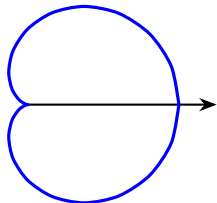
$$r^2 = x^2 + y^2 = 2Rx = 2Rr \cos \theta,$$

从而该圆的极坐标方程为 $r = 2R \cos \theta.$

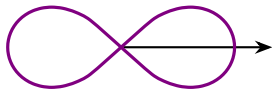
其它常见的极坐标方程及其曲线有: ($a > 0$)



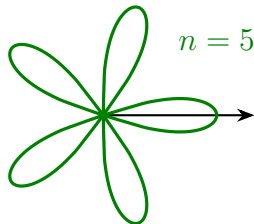
阿基米德螺旋线 $r = a\theta$



心形线 $r = a(1 - \cos \theta)$



双纽线 $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$



n 纽线 $r^2 = a^2 \cos(n\theta)$

